香 港 考 試 及 評 核 局

香 港 中 學 文 憑 考 試

數學
延伸部分
單元二（代數與微積分）

（樣本試卷）

考試時間：兩小時三十分鐘

本試卷必須用中文作答

考生須知

1. 本試卷分甲、乙兩部。每部各佔 50 分。

2. 本試卷各題**均須作答**。

3. 所有算式，須詳細列出。

4. 除特別指明外，數值答案須用真確值表示。

考試結束前不可將試卷攜離試場

參考公式

$\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B$	$\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$
$\cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B$	$\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$
$\tan(A\pm B)=\dfrac{\tan A\pm\tan B}{1\mp\tan A\tan B}$	$\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$
$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$	$\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$
$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$	
$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$	

****

甲部（50 分）

1. 從基本原理求 $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{2x})$ 。

（4 分）

2. 有一球狀雪塊正在溶解，其體積以 $4\ \text{cm}^3\text{s}^{-1}$ 的恒速不斷減少。當球狀雪塊的半徑為 5 cm 時，求該半徑的變率。

（4 分）

3. 曲線於任意點 (x,y) 的斜率為 $\dfrac{dy}{dx}=2x\ln(x^2+1)$ 。已知該曲線通過點 $(0,1)$ 。
求該曲線的方程。

（4 分）

4. 求 $\displaystyle\int\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^4 dx$ 。

（4 分）

5. 藉考慮 $\sin\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{3\pi}{7}$ ，求 $\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{3\pi}{7}$ 的值。

（4 分）

6. 設 C 為曲線 $3e^{x-y}=x^2+y^2+1$ 。
求 C 於點 $(1,1)$ 的切線方程。

（5 分）

7. 解以下線性方程組

$$\begin{cases} x+7y-6z=-4 \\ 3x-4y+7z=13 \\ 4x+3y+z=9 \end{cases}$$ 。

（5 分）

8. (a) 利用分部積分法，求 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$ 。

(b)

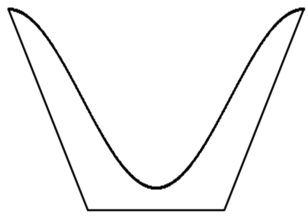

圖 1

某容器的**內表面**是把曲線 $y=-\cos x$（其中 $0\le x\le \pi$）繞着 y 軸旋轉所成（見圖 1）。求該容器的容量。

（6 分）

9.

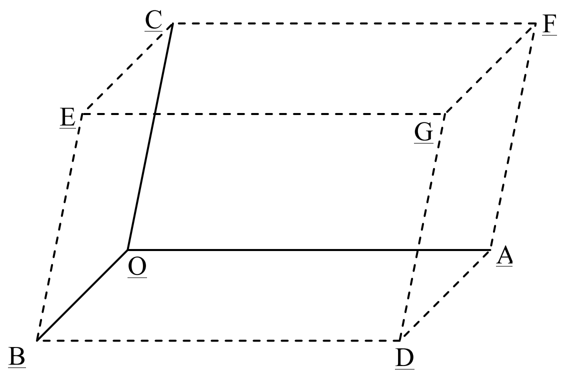

圖 2

設 $\overrightarrow{OA}=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ ， $\overrightarrow{OB}=3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 及 $\overrightarrow{OC}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ 。圖 2 顯示由向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 及 $\overrightarrow{OC}$ 形成的平行六面體 *OADBECFG*。

(a) 求平行四邊形 *OADB* 的面積。

(b) 求平行六面體 *OADBECFG* 的體積。

(c) 若 C' 為與 C 不同的另一點，使得由 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 及 $\overrightarrow{OC'}$ 形成的平行六面體體積與 *OADBECFG* 相同，求 $\overrightarrow{OC'}$ 的一個可能的向量。

（6 分）

10. 設 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$，當中 $0°<\theta<180°$ 。

(a) 以數學歸納法，證明對任意正整數 n，

$$A^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}\text{ 。}$$

(b) 解 $\sin 3\theta+\sin 2\theta+\sin\theta=0$ 。

(c) 已知 $A^3+A^2+A=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$ 。
計算 a 的值。

（8 分）

乙部（50 分）

11. 設 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 及 $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 。

(a) 設 I 及 O 分別為 3×3 單位矩陣及零矩陣。

(i) 證明 $P^3-2P^2-P+I=O$ 。

(ii) 利用 (i) 的結果，或用其他方法，求 P^{-1} 。

（5 分）

(b) (i) 證明 $D=P^{-1}AP$ 。

(ii) 證明 D 及 A 為非奇異。

(iii) 求 $(D^{-1})^{100}$ 。
由此，或用其他方法，求 $(A^{-1})^{100}$ 。

（7 分）

12. 設 $\mathrm{f}(x)=\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{4}{x+1}-1$，當中 $x\neq\pm1$。

(a) (i) 求 $y=\mathrm{f}(x)$ 的圖像的 x 軸及 y 軸截距。

(ii) 求 $\mathrm{f}'(x)$，並證明

$$\mathrm{f}''(x)=\frac{16(3x^2+1)}{(x-1)^3(x+1)^3}\ ,$$

其中 $x\neq\pm1$。

(iii) 求 $y=\mathrm{f}(x)$ 的圖像中所有極值點，並證明圖像中沒有拐點。

（6 分）

(b) 求 $y=\mathrm{f}(x)$ 的圖像的所有漸近線。

（2 分）

(c) 描繪 $y=\mathrm{f}(x)$ 的圖像。

（3 分）

(d) 設 S 為 $y=\mathrm{f}(x)$ 的圖像、線 $x=3$、線 $x=a\ (a>3)$ 及線 $y=-1$ 所圍成的面積。

求 S，答案以 a 表示。

推證 $S<4\ln 2$。

（3 分）

13. (a) 設 $a>0$，而 $\mathrm{f}(x)$ 為一連續函數。

證明 $\int_0^a \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^a \mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{d}x$ 。

由此證明 $\int_0^a \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^a[\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(a-x)]\,\mathrm{d}x$ 。

（3 分）

(b) 證明 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}=\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$ 。

（5 分）

(c) 利用(a)及(b)，或用其他方法，計算 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-x+1)(e^{2x-1}+1)}$ 。

（6 分）

14.

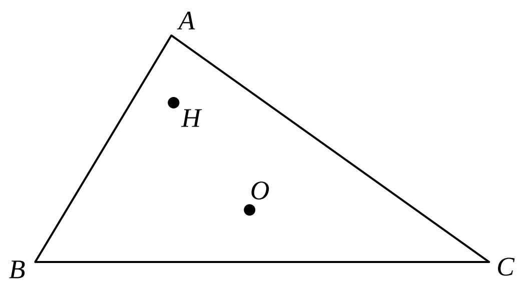

圖 3

在圖 3 中，ΔABC 為一個銳角三角形，而 O 及 H 分別為其外心及垂心。設 $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$，$\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$，$\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$ 及 $\overrightarrow{OH}=\mathbf{h}$ 。

(a) 證明 $(\mathbf{h}-\mathbf{a})//(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ 。

（3 分）

(b) 設 $\mathbf{h}-\mathbf{a}=t(\mathbf{b}+\mathbf{c})$，其中 t 為一非零常數。
證明

(i) $t(\mathbf{b}+\mathbf{c})+\mathbf{a}-\mathbf{b}=s(\mathbf{c}+\mathbf{a})$，其中 s 為一純量，

(ii) $(t-1)(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$ 。

（5 分）

(c) 以 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 及 $\mathbf{c}$ 表 $\mathbf{h}$。

（2 分）

試卷完