目　錄

2022-DSE
數學　延伸部分
單元二

請在此貼上電腦條碼

考生編號

香　港　考　試　及　評　核　局
2　0　2　2　年　香　港　中　學　文　憑　考　試

數學　延伸部分
單元二（代數與微積分）
試題答題簿

本試卷必須用中文作答
兩小時三十分鐘完卷
（上午八時三十分至上午十一時）

考生須知

(一)　宣布開考後，考生須首先在第 1 頁之適當位置填寫考生編號，並在第 1、3、5、7、9、11 及 13 頁之適當位置貼上電腦條碼。

(二)　本試卷分**兩部**，即甲部和乙部。

(三)　本試卷**各題均須作答**，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。不可在各頁邊界以外位置書寫。寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(四)　如有需要，可要求派發方格紙及補充答題紙。每張紙均須填寫考生編號、填畫試題編號方格、貼上電腦條碼，並用繩縛於**簿內**。

(五)　除特別指明外，須詳細列出所有算式。

(六)　除特別指明外，數值答案須用真確值表示。

(七)　試場主任宣布停筆後，考生不會獲得額外時間貼上電腦條碼及填畫試題編號方格。

A032C001

參考公式

$\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B$	$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
$\cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B$	$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$
$\tan(A\pm B)=\frac{\tan A\pm\tan B}{1\mp\tan A\tan B}$	$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$	$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$
$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$	
$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$	

****

甲部（50 分）

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

1. 設 $g(x)=\frac{1}{\sqrt{5x+4}}$，其中 $x>0$。證明 $g(1+h)-g(1)=\frac{-5h}{3\sqrt{5h+9}\,(3+\sqrt{5h+9})}$。由此，從基本原理求 $g'(1)$。 (4 分)

$$g(1+h)-g(1)=\frac{1}{\sqrt{5(1+h)+4}}-\frac{1}{\sqrt{5(1)+4}}=\frac{1}{\sqrt{5h+9}}-\frac{1}{\sqrt{9}}$$

$$=\frac{3-\sqrt{5h+9}}{3\sqrt{5h+9}}=\frac{3-\sqrt{5h+9}}{3\sqrt{5h+9}}\cdot\frac{3+\sqrt{5h+9}}{3+\sqrt{5h+9}}$$

$$=\frac{9-5h-9}{3\sqrt{5h+9}\,(3+\sqrt{5h+9})}=\frac{-5h}{3\sqrt{5h+9}\,(3+\sqrt{5h+9})}$$

$$\therefore g'(1)=\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-5h}{h(3\sqrt{5h+9}\,(3+\sqrt{5h+9}))}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{-5}{3\sqrt{5h+9}\,(3+\sqrt{5h+9})}=\frac{-5}{3\sqrt{5(0)+9}\,(3+\sqrt{5(0)+9})}$$

$$=\frac{-5}{3\sqrt{14}\,(3+\sqrt{14})}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

2. 設 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$ 。

(a) 證明 $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=1+\sec\theta\csc\theta$ 。

(b) 解方程 $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=5$ 。

(5 分)

(a) LHS $=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}+\frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)}+\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta(\cos\theta-\sin\theta)}$

$=\frac{\sin^3\theta-\cos^3\theta}{\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)}=\frac{(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)}{\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)}$

$=\frac{\sin^2\theta+\cos\theta\sin\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=1+\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=1+\sec\theta\csc\theta$

$=RHS$

(b) 由(a)得 $1+\sec\theta\csc\theta=5$

$\therefore \sec\theta\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin2\theta}=\frac{2}{\sin2\theta}=4$

$\therefore \frac{1}{\sin2\theta}=2 \quad \therefore \sin2\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore 2\theta=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3} \quad \therefore \theta=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi}{3}$

$\because \frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta\neq\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

3. (a) 利用數學歸納法，證明對所有正整數 n， $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2 = n(2n+1)$ 。

(b) 利用 (a)，計算 $\sum_{k=11}^{100}(-1)^k k^2$ 。

(7 分)

(a) 设「 $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2 = n(2n+1)$ 」为命题 $P(n)$

当 $n=1$ 时 $LHS = (-1)^1(1)^2 + (-1)^2(2)^2 = (-1)+4 = 3 = RHS$

∴ $P(1)$ 为真

假设对于任意正整数 k，皆有 $P(k)$ 为真 ∴ 当 $n=k+1$ 时

$LHS = \sum_{k=1}^{2(k+1)}(-1)^k k^2 = k(2k+1) + (-1)^{2k+1}(2k+1)^2 + (-1)^{2k+2}(2k+2)^2$

$= 2k^2+k - 4k^2-4k-1+4k^2+8k+4$

$= 2k^2+5k+3 = (k+1)(2(k+1)+1) = RHS$

∴ $P(k+1)$ 为真

∴ 根据数学归纳法原理，对于所有正整数 n，$P(n)$ 命题皆成立.

(b) 由 (a) 得

$\sum_{k=11}^{100}(-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{100}(-1)^k(k^2) - \sum_{k=1}^{10}(-1)^k(k^2)$

$= 50(100+1) - 5(10+1)$

$= 5050 - 55$

$= 4995$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

4. 設 $y=(7x-2x^2)e^{-x}$ 。

(a) 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

(b) 某人宣稱 $y=(7x-2x^2)e^{-x}$ 的圖像有兩拐點。 你是否同意？ 解釋你的答案。

(6 分)

(a) $\frac{dy}{dx}=(7-4x)e^{-x}+(7x-2x^2)(-e^{-x})$

$=(7-11x+2x^2)e^{-x}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=(-11+4x)e^{-x}+(7-11x+2x^2)(-e^{-x})$

$=(-18+15x-2x^2)e^{-x}$

(b) $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ 时 $(-18+15x-2x^2)e^{-x}=0$

对于 $(-18+15x-2x^2)=0$ $\therefore x=\frac{3}{2}$ 或 6

$e^{-x}\neq 0$

∴ 有

x	$(-\infty,\frac{3}{2})$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2},6)$	6	$(6,+\infty)$
$\frac{d^2y}{dx^2}$	−	0	+	0	−

∴ $y=(7x-2x^2)e^{-x}$ 有两个拐点

∴ 同意

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

5. 設 n 為大於 1 的整數。 定義 $(a+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\mu_k x^k$ ， 其中 a 為一常數。 已知 $\mu_2=-10$ 。

(a) 解釋為什麼 a 是一負數及 n 是一奇數。

(b) 設 $(bx-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k x^k$ ， 其中 b 為一常數。 若 $\lambda_0=\mu_0$ 及 $\lambda_1=2\mu_1$ ， 求 a 、 b 及 n 。

(6 分)

(a) $(a+x)^n = C_k^n (a)^{n-k} (x)^k = \sum_{k=0}^{n} \mu_k x^k$

$\because \mu_2=-10 \quad \therefore k=2$

$\therefore C_2^n (a)^{n-2} (x)^2 = \mu_2 x^2 = -10x^2$

$\therefore C_2^n (a)^{n-2} = -10$ 不符題意

$\because C_2^n > 0 \quad \therefore (a)^{n-2}$ 为负数 若 $n-2$ 为偶数 $(a)^{n-2}$ 为正数 $\checkmark$

$\therefore a$ 为一负数 n 是一奇数

(b) $(bx-1)^n = C_k^n (bx)^k (-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k$

$\because \mu_0=\lambda_0$

$\therefore a^n = (-1)^n \quad \therefore a=-1$

$\because \lambda_1 = 2\mu_1$

$\therefore C_1^n (-1)^{n-1} b = 2(C_1^n (a)^{n-1})$

$\therefore n(-1)^{n-1} b = 2n(-1)^{n-1}$

$\therefore b=2$

$\because$ 由(a)得 $C_2^n (a)^{n-2} = -10$ $n-2$ 为奇数.

$\therefore C_2^n (-1)^{n-2} = -10$

$\therefore C_2^n = 10$

$\therefore n=5$

$\therefore a=-1,\ b=2,\ n=5$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

6. (a) 利用代換積分法，證明 $\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+$常數 。

(b) 在曲線 G 上的任意點 (x, y) ， G 的切線的斜率為 $\frac{2x+1}{x^2+2x+5}$ 。 已知 G 通過點 $(-3, \ln 2)$ ， G 是否通過點 $\left(-1, \frac{-\pi}{8}\right)$ ？ 解釋你的答案。

(7 分)

(a) $\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{1}{(1+x)^2+4}$

代換 $1+x = 2\tan\theta$ $\therefore d\theta = \frac{1}{2\sec^2\theta}\,dx = \frac{\cos^2\theta}{2}dx$

$\therefore$ 原式 $= \int \frac{1}{4\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)} \cdot \frac{2}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int \frac{1}{2}\,d\theta$

$= \frac{1}{2}\theta + C$

$\because \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)$

$\therefore$ 原式 $= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) +$ 常数

(b) $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{1}{x^2+2x+5}\,d(x^2+x) = \int \frac{1}{x^2+2x+5}\,d(x(x+1))$

$= (x^2+x)\left(\frac{1}{x^2+2x+5}\right) - \int x^2+$

將 $(-3, \ln 2)$ 代入

將 $\left(-1, \frac{-\pi}{8}\right)$ 代入

$\therefore$ G 通过 $\left(-1, \frac{-\pi}{8}\right)$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

7. 考慮曲線 $\Gamma: y=\ln(x+2)$，其中 $x>0$。設 P 為 Γ 上的一動點且 h 為其 x 坐標。將 Γ 在 P 的切線記為 L，且將 Γ、L 與 y 軸圍成的區域的面積記為 A 平方單位。

(a) 證明 $A=\dfrac{h^2+4h}{2h+4}-2\ln(h+2)+2\ln 2$。

(b) 若 $h=3^{-t}$，其中 t 是以秒為單位的時間，求當 $t=1$ 時 A 的變率。

(8 分)

(a) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d\ln(x+2)}{d(x+2)}\cdot\dfrac{d(x+2)}{dx}=\dfrac{1}{x+2}$.

$\therefore$ 在 P 点切线斜率为 $\dfrac{1}{h+2}$

设 L: $y=\dfrac{1}{h+2}x+m$ 将 $(h, \ln(h+2))$ 代入得

$m=\ln(h+2)-\dfrac{h}{h+2}$

$\therefore L$: $y=\dfrac{1}{h+2}x+\ln(h+2)-\dfrac{h}{h+2}$

$\therefore A=\displaystyle\int_0^h\left(\frac{1}{h+2}x+\ln(h+2)-\frac{h}{h+2}-\ln(h+2)\right)dx$

$=\displaystyle\int_0^h\left(\frac{1}{h+2}x-\frac{h}{h+2}-2\ln(h+2)\right)dx$

$=\dfrac{1}{h+2}\cdot\dfrac{1}{2}\left[x^2\right]_0^h-\dfrac{h}{h+2}\left[x\right]_0^h-2\ln(h+2)\left[x\right]_0^h$

$=\dfrac{h^2+4h}{2h+4}-2\ln(h+2)+2\ln 2$.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(b) $\frac{dA}{dt} = \frac{(2h+4)(2h+4) - h(h+4)(2)}{4(h+2)^2}\frac{dh}{dt} - \frac{2}{h+2}\frac{dh}{dt}$

$= \frac{dh}{dt}\left(\frac{4h^2+16h+16 - 2h^2 - 8h - 8h - 16}{4(h+2)^2}\right)$

$= \frac{dh}{dt}\left(\frac{2h^2}{4(h+2)^2}\right)$

$\because h = 3^{-t} = (\frac{1}{3})^t = e^{(\ln\frac{1}{3})t} = e^{-\ln 3(t)}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{d\, e^{(-\ln 3)t}}{d(-\ln 3)t} \cdot \frac{d(-\ln 3)t}{dt}$

$= -\ln 3\ e^{(-\ln 3)t} = -\ln 3\,(\frac{1}{3})^t$

$\because t = 1$

$\therefore \frac{dh}{dt} = -\ln 3\,(\frac{1}{3}) \qquad h = \frac{1}{3}$

$\therefore \frac{dA}{dt} = -\frac{1}{3}\ln 3\left(\frac{2(\frac{1}{3})^2}{4(\frac{1}{3}+2)^2}\right) = \frac{-\ln 3}{3}\left(\frac{\frac{4}{9}}{\frac{196}{9}}\right)$

$= \frac{-\ln 3}{147}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

8. 考慮實變數 x, y, z 的線性方程組

$$(E):\begin{cases} ax + 2y - z = 4k \\ -x + ay + 2z = 4 \\ 2x - y + az = k^2 \end{cases}，其中\ a, k \in \mathbf{R}\ 。$$

(a) 假設 (E) 有唯一解。 以 a 及 k 表 y。

(b) 假設 (E) 有無限多個解。 解 (E)。

(7 分)

(a) $\left[\begin{array}{ccc|c} a & 2 & -1 & 4k \\ -1 & a & 2 & 4 \\ 2 & -1 & a & k^2 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3+2R_2 \to R_2]{aR_3-2R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -a-4 & a^2+2 & ak^2-8k \\ 0 & 2a-1 & 4+a & 8+k^2 \\ 2 & -1 & a & k^2 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{\frac{-(a+4)}{2a-1}R_2-R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \frac{-2a^3-12a-14}{2a-1} & \\ 0 & 2a-1 & 4+a & 8+k^2 \\ 2 & -1 & a & k^2 \end{array}\right]$

$\Delta = \begin{vmatrix} a & 2 & -1 \\ -1 & a & 2 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 8 - 1 + 2a$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

乙部（50 分）

9. 設 $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x-1}$ ，其中 $x\neq 1$ 。將 $y=f(x)$ 的圖像記為 H 。

(a) 求 H 的漸近線。 (3 分)

(b) 求 H 的極大點及極小點。 (4 分)

(c) 描繪 H 。 (3 分)

(d) 設 R 為 H 與直線 $y=10$ 圍成的區域。求 R 繞直線 $y=10$ 旋轉所得的旋轉體的體積。 (3 分)

(a) $f(x)=\dfrac{(x-1)x+4x}{x-1} = x+\dfrac{4x}{x-1}$

∴ H 有斜渐近线 $y=x$

∵ $x-1=0$ ∴ $x=1$ ∴ H 有垂直渐近线 $x=1$

(b) $f'(x)=\dfrac{(2x+3)(x-1)-(x^2+3x)(1)}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$

∵ $f'(x)=0$ ∴ $x=3$ 或 -1

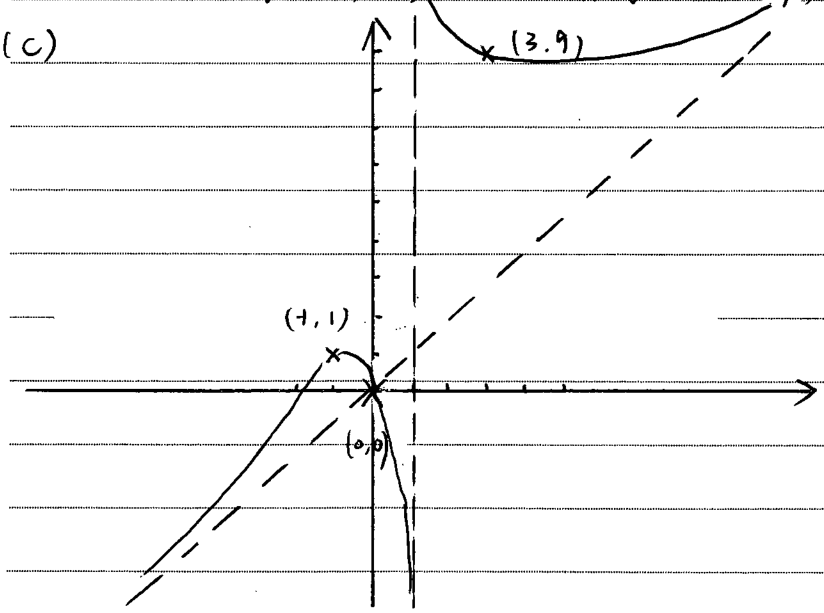
有

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	u	−	0	+

u: 未定义

∴ H的极大点为 $(-1,1)$，极小点为 $(3,9)$

(c)



寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(d) $10 = \dfrac{x^2+3x}{x-1}$ $\therefore x^2+3x = 10x-10$

$\therefore x = 5$ 或 2

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, 5)$	5	$(5, +\infty)$
$f(x)$	<10	$=10$	<10	$=10$	>10

$\therefore V = \pi\int_2^5 \left(10 - \dfrac{x^2+3x}{x-1}\right)^2 dx$

$= \pi\int_2^5 \left(\dfrac{-x^2+7x-10}{x-1}\right)^2 dx$

$= \pi\int_2^5 \dfrac{-(x-1)^2+5(x-2)}{(x-1)} dx$

$= \pi\int_2^5 -(x-1)dx + 5\pi\int_2^5 dx - 5\pi\int_2^5 \dfrac{1}{x-1} dx$

$= \dfrac{-\pi}{2}\left[(x-1)^2\right]_2^5 + 5\pi\left[x\right]_2^5 - 5\pi\left[\ln|x-1|\right]_2^5$

$= \dfrac{-\pi}{2}(16-1) + 5\pi(3) - 5\pi(\ln 4 - \ln 1)$

$= 15\pi - \dfrac{15}{2}\pi - 5\pi\ln 4$

$= \left(\dfrac{15}{2} - 5\ln 4\right)\pi$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

10. 設 $g(x)=\cos^2 x\cos 2x$ 。

(a) 證明 $\int g(x)\,dx=\frac{\sin 2x\cos^2 x}{2}+\frac{1}{2}\int \sin^2 2x\,dx$ 。 (2 分)

(b) 計算 $\int_0^{\pi} g(x)\,dx$ 。 (2 分)

(c) 利用代換積分法，計算 $\int_0^{\pi} xg(x)\,dx$ 。 (4 分)

(d) 計算 $\int_{-\pi}^{2\pi} xg(x)\,dx$ 。 (4 分)

(a) $\int g(x)\,dx=\int \cos^2 x\cos 2x\,dx=\int \frac{(1+\cos 2x)\cos 2x}{2}\,dx$

$=\int \cos x\cos 2x\,d\sin x=\sin x\cos x\cos 2x-\int \sin x(-\sin x\cos 2x-2\cos x\sin 2x)\,dx$

$=\frac{\sin 2x\cos^2 x}{2}+\frac{1}{2}\int \sin^2 2x\,dx$

(b) $\int_0^{\pi} g(x)\,dx=\left[\frac{\sin 2x\cos^2 x}{2}\right]_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 4x}{2}\,dx$

$=\left[\frac{0-0}{2}\right]+\frac{1}{4}[x]_0^{\pi}-\frac{1}{16}[\sin 4x]_0^{\pi}$

$=0+\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$

(c) $\int_0^{\pi} xg(x)\,dx$ 代換 $u=\pi-x$. $\therefore x=\pi-u$.

$\therefore$ 原式 $=\int_{\pi}^{0}(\pi-u)\cos^2(\pi-u)\cos 2(\pi-u)\,d(\pi-u)$

$=-\int_{\pi}^{0}(\pi-u)\cos^2 u\cos 2u\,du$

$=\int_0^{\pi}(\pi-u)\cos^2 u\cos 2u\,du.$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$= \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos^2 x \cos 2x \, dx$

$\therefore 2\int_0^{\pi} x g(x)\, dx = \pi \int_0^{\pi} g(x)\, dx$

$\therefore \int_0^{\pi} x g(x)\, dx = \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{8}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

11. (a) 設 n 為一正整數。將 2×2 單位矩陣記為 I。

(i) 設 A 為一 2×2 矩陣。化簡 $(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^n)$ 。

(ii) 設 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ ，其中 θ 不是 2π 的倍數。

已知 $A^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$ 。

(1) 證明 $(I-A)^{-1}=\dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2} & -\cos\frac{\theta}{2}\\ \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$ 。

(2) 利用 (a)(i) 的結果及 (a)(ii)(1)，

證明 $I+A+A^2+\cdots+A^n=\dfrac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix}\cos\frac{n\theta}{2} & -\sin\frac{n\theta}{2}\\ \sin\frac{n\theta}{2} & \cos\frac{n\theta}{2}\end{pmatrix}$ 。

(7 分)

(b) 利用 (a)(ii)，計算

(i) $\cos\frac{5\pi}{18}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{6}+\cdots+\cos25\pi$ ；

(ii) $\cos^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{2\pi}{7}+\cos^2\frac{3\pi}{7}+\cdots+\cos^2 7\pi$ 。

(6 分)

(a) (i) $(I-A)(I+A+A^2+\ldots+A^n)$

$= I-AI+IA-A^2+IA^2-A^3+\ldots+IA^n-A^{n+1}$

$= I-A^{n+1}$

(ii) (1) $I-A = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1-\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & 1-\cos\theta\end{bmatrix}$

$\det(I-A) = (1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta = 1-2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta = 2-2\cos\theta$

$= 4\sin^2(\frac{\theta}{2})$

$\operatorname{cof}(I-A) = \begin{bmatrix}2\sin^2(\frac{\theta}{2}) & \sin\theta\\ -\sin\theta & 2\sin^2\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}$

$\operatorname{adj}(I-A) = \operatorname{cof}(I-A)^T = \begin{bmatrix}2\sin^2(\frac{\theta}{2}) & -\sin\theta\\ \sin\theta & 2\sin^2\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$\therefore (I-A)^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\,\text{adj}.(I-A) = \dfrac{1}{4\sin^2(\frac{\theta}{2})}\begin{bmatrix} 2\sin^2\frac{\theta}{2} & -\sin\theta \\ \sin\theta & 2\sin^2\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$

$= \dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\begin{bmatrix} \sin\frac{\theta}{2} & -\cos\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$

(2) $LHS = (I-A)^{-1}(I-A^{n+1})$

$= \dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\begin{bmatrix} \sin\frac{\theta}{2} & -\cos\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(n+1)\theta & -\sin(n+1)\theta \\ \sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta \end{bmatrix}$

$= \dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\begin{bmatrix} \sin\frac{\theta}{2}\cos(n+1)\theta - \cos\frac{\theta}{2}\sin(n+1)\theta & \sin\frac{\theta}{2}(-\sin(n+1)\theta) - \cos\frac{\theta}{2}\cos(n+1)\theta \\ \cos\frac{\theta}{2}\cos(n+1)\theta + \sin\frac{\theta}{2}\sin(n+1)\theta & \cos\frac{\theta}{2}(-\sin(n+1)\theta) + \cos(n+1)\theta\sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$

$= \dfrac{2\sin\frac{(n+1)}{2}\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}\begin{bmatrix} \cos\frac{n\theta}{2} & -\sin\frac{n\theta}{2} \\ \sin\frac{n\theta}{2} & \cos\frac{n\theta}{2} \end{bmatrix} = \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\begin{bmatrix} \cos\frac{n\theta}{2} & -\sin\frac{n\theta}{2} \\ \sin\frac{n\theta}{2} & \cos\frac{n\theta}{2} \end{bmatrix}$

$= RHS$

(b) (i) 由 (i) 得 对应位置

$I + A + A^2 + \dots + A^n$

$\because \theta = \frac{5\pi}{18}$ 不是 2π 倍数 $\therefore$ 成立

$\therefore$ 原式 $= \cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \dots + \cos 90\theta$

$= I + A + A^2 + \dots + A^{90} - I$ (1, 1) 位置系数

$\therefore$ 原式 $= \dfrac{\sin\frac{(90+1)}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \cdot \cos\dfrac{90\theta}{2} - 1$

$= \dfrac{\sin\frac{455}{36}\pi}{\sin\frac{5}{36}\pi} \cdot \cos\dfrac{25\pi}{2} - 1$

$= 0 - 1 = -1$

(ii) 原式 $= \dfrac{1+\cos\frac{2\pi}{7}}{2} + \dfrac{1+\cos\frac{4\pi}{7}}{2} + \dots + \dfrac{1+\cos 14\pi}{2}$

$= \frac{1}{2}\times 49 + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \dots + \cos 14\pi\right)$

$\because \frac{2\pi}{7}$ 不是 2π 倍数 $\therefore \theta = \frac{2\pi}{7}$

$\therefore$ 原式 $= \dfrac{49}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin 50\theta}{\sin\frac{49\theta}{2}} \cdot \cos\dfrac{50\theta}{2} - 1\right)$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$= \frac{49}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin \frac{100}{7}\pi}{\sin 7\pi} \cdot \cos \frac{50\pi}{7} - 1 \right) = \frac{49}{2} - \frac{1}{2} = 24$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

12. 考慮 ΔABC。 將原點記為 O。

(a) 設 D 為 BC 上的一點使得 AD 為 $\angle BAC$ 的角平分線。 定義 $BC=a$ 、 $AC=b$ 及 $AB=c$。

(i) 利用 $BD:DC=c:b$ 這事實，證明 $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{OA}+\frac{b}{b+c}\overrightarrow{OB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{OC}$。

(ii) 設 E 為 AC 上的一點使得 BE 為 $\angle ABC$ 的角平分線。
定義 $\overrightarrow{OJ}=\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$。
證明 J 在 AD 上。 由此，推證 AD 與 BE 相交於 J。

(7 分)

(b) 假定 $\overrightarrow{OA}=35\mathbf{i}+9\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 、 $\overrightarrow{OB}=40\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 及 $\overrightarrow{OC}=-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$。 設 I 為 ΔABC 的內心。

(i) 求 $\overrightarrow{OI}$。

(ii) 藉考慮 $\overrightarrow{AI}\times\overrightarrow{AB}$，求 ΔABC 的內切圓的半徑。

(5 分)

(a)(i) $\overrightarrow{AD}=\frac{c\overrightarrow{AC}+b\overrightarrow{AB}}{b+c}=\frac{c(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})+b(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})}{b+c}=-\overrightarrow{OA}+\frac{b\overrightarrow{OB}}{b+c}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{OC}$

(ii) $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{OJ}-\overrightarrow{OA}$

$=\left(\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)$

$=\left(\frac{-b-c}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}\right)$

$\because \frac{-1}{\frac{-b-c}{a+b+c}}=\frac{\frac{b}{b+c}}{a+b+c}=\frac{\frac{c}{b+c}}{\frac{c}{a+b+c}}=\frac{a+b+c}{b+c}$

$\therefore \overrightarrow{AJ}=\frac{a+b+c}{b+c}\overrightarrow{AD}$

$\therefore$ J在AD上

$\because$ BE为∠ABC角平分线，AD为∠BAC的角平分线

$\therefore$ BE与AD交点为△ABC内心

写於邊界以外的答案，將不予評閱。

(b)(i)

$AB = |\vec{AB}| = |5\hat{i}-12\hat{j}| = \sqrt{5^2+12^2} = 13 = c$

$AC = |\vec{AC}| = |-35\hat{i}-12\hat{j}| = \sqrt{35^2+12^2} = 37 = b$

$BC = |\vec{BC}| = |-40\hat{i}| = \sqrt{40^2} = 40 = a$

$\because$ I 为 $\triangle ABC$ 内心. 由 (a)(ii) 得 J 为 $\triangle ABC$ 内心 为 AD.BE 交点

$\therefore \vec{OI} = \vec{OJ} = \frac{a}{a+b+c}\vec{OA} + \frac{b}{a+b+c}\vec{OB} + \frac{c}{a+b+c}\vec{OC}$

$= \frac{40}{90}(35\hat{i}+9\hat{j}+\hat{k}) + \frac{37}{90}(40\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}) + \frac{13}{90}(-3\hat{j}+\hat{k})$

$= 32\hat{i} + \frac{7}{3}\hat{j} + \hat{k}$

(ii) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot r + \frac{1}{2}\cdot AC\cdot r + \frac{1}{2}\cdot BC\cdot r = \frac{1}{2}r(AB+BC+AC)$

$= \frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|$.

$S_{\triangle AIB} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot r = \frac{1}{2}|\vec{AI}\times\vec{AB}|$

$\vec{AI} = \vec{OI} - \vec{OA} = -3\hat{i} - \frac{20}{3}\hat{j}$ $\quad \vec{AB} = 5\hat{i} - 12\hat{j}$

$\vec{AI}\times\vec{AB} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & -\frac{20}{3} & 0 \\ 5 & -12 & 0 \end{vmatrix} = 36\hat{k} + \frac{100}{3}\hat{k} = \frac{208}{3}\hat{k}$

$\therefore S_{\triangle AIB} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{208}{3}\right)^2} = \frac{104}{3} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot r = \frac{13}{2}\cdot r$

$\therefore r = \frac{16}{3}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

– 試卷完 –

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

第五級
示例二

2022-DSE
數學 延伸部分
單元二

香 港 考 試 及 評 核 局
2 0 2 2 年 香 港 中 學 文 憑 考 試

數學 延伸部分
單元二（代數與微積分）
試題答題簿

本試卷必須用中文作答
兩小時三十分鐘完卷
（上午八時三十分至上午十一時）

請在此貼上電腦條碼

考生編號									

考生須知

(一) 宣布開考後，考生須首先在第 1 頁之適當位置填寫考生編號，並在第 1、3、5、7、9、11 及 13 頁之適當位置貼上電腦條碼。

(二) 本試卷分**兩部**，即甲部和乙部。

(三) 本試卷**各題均須作答**，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。不可在各頁邊界以外位置書寫。寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(四) 如有需要，可要求派發方格紙及補充答題紙。每張紙均須填寫考生編號、填畫試題編號方格、貼上電腦條碼，並用繩縛於**簿內**。

(五) 除特別指明外，須詳細列出所有算式。

(六) 除特別指明外，數值答案須用真確值表示。

(七) 試場主任宣布停筆後，考生不會獲得額外時間貼上電腦條碼及填畫試題編號方格。

A032C001

參考公式

$\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B$	$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
$\cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B$	$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$
$\tan(A\pm B)=\dfrac{\tan A\pm\tan B}{1\mp\tan A\tan B}$	$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$	$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$
$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$	
$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$	

****

甲部（50 分）

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

1. 設 $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5x+4}}$ ，其中 $x>0$ 。證明 $g(1+h)-g(1)=\dfrac{-5h}{3\sqrt{5h+9}\,(3+\sqrt{5h+9})}$ 。由此，從基本原理求 $g'(1)$ 。 (4 分)

$$g(1+h)-g(1)=\frac{1}{\sqrt{5(1+h)+4}}-\frac{1}{\sqrt{5+4}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5h+9}}-\frac{1}{3}$$
$$=\frac{3-\sqrt{5h+9}}{3\sqrt{5h+9}}$$
$$=\frac{(3-\sqrt{5h+9})(3+\sqrt{5h+9})}{3\sqrt{5h+9}(3+\sqrt{5h+9})}$$
$$=\frac{-5h}{3\sqrt{5h+9}(3+\sqrt{5h+9})}$$

$$g'(1)=\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{-5h}{3h\sqrt{5h+9}(3+\sqrt{5h+9})}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{-5}{3\sqrt{5h+9}(3+\sqrt{5h+9})}$$
$$=\frac{-5}{3\sqrt{9}(3+\sqrt{9})}$$
$$=\frac{-5}{54}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

2. 設 $\left(\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$。

(a) 證明 $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=1+\sec\theta\csc\theta$ 。

~~(b)~~ 解方程 $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=5$ 。

(5 分)

(a). $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}$

$=\frac{\tan\theta}{1-\frac{1}{\tan\theta}}+\frac{\frac{1}{\tan\theta}}{1-\tan\theta}$

$=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1}+\frac{1}{\tan\theta-\tan^2\theta}$

$=\cancel{-\tan^3\theta+\sin^3\theta}\ \frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-1}+\frac{1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$

$=\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta(\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta)+\cos^2\theta(\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta)}{2\sin^2\theta\cos^2\theta-\sin^3\theta\cos\theta-\cos^3\theta\sin\theta}=1+\sec\theta\csc\theta$

(b). $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=5$

$1+\sec\theta\csc\theta=5$

$\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=4$

$4\sin\theta\cos\theta=1$

$\sin2\theta=\frac{1}{2}$

$2\theta=\frac{5\pi}{6}$

$\theta=\frac{5\pi}{12}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

3. (a) 利用數學歸納法，證明對所有正整數 n， $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2 = n(2n+1)$ 。

(b) 利用 (a)，計算 $\sum_{k=11}^{100}(-1)^k k^2$ 。

(7 分)

(a). 設P(n)為命題 " $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2 = n(2n+1)$ "

當 $n=1$， $LHS = \sum_{k=1}^{2}(-1)^k k^2$

$= (-1)^1(1)^2 + (-1)^2(2)^2$

$= 3$

$=(1)(2(1)+1)$

$=RHS$

∴ P(1) 正確

設 P(j) 正確

i.e. $\sum_{k=1}^{2j}(-1)^k k^2 = k(2k+1)$

當 $n=j+1$， $LHS = \sum_{k=1}^{2(j+1)}(-1)^k k^2$

$= j(2j+1) + (-1)^{2j+1}(2j+1)^2 + (-1)^{2j+2}(2j+2)^2$

$= 2j^2+j-(4j^2+4j+1)+(4j^2\ 8j+4)$

$=2j^2+5j+3$

$=(j+1)(2j+3)$

$=(j+1)(2(j+1)+1)$

$=RHS$

∴ P(j+1) 正確

∴ 根據數學歸納法，$\forall n \in N^+$，P(n) 正確.

(b). $\sum_{k=11}^{100}(-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{2\times 50}(-1)^k k^2 - \sum_{k=1}^{2\times 5}(-1)^k k^2$

$= 50(2(50)+1) - 5(2(5)+1)$

$= 4995$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

4. 設 $y=(7x-2x^2)e^{-x}$ 。

(a) 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

(b) 某人宣稱 $y=(7x-2x^2)e^{-x}$ 的圖像有兩拐點。 你是否同意？ 解釋你的答案。

(6 分)

(a). $y=(7x-2x^2)e^{-x}$

$\frac{dy}{dx}=(7-4x)e^{-x}-(7x-2x^2)e^{-x}$

$=(2x^2-11x+7)e^{-x}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=(4x-11)e^{-x}-(2x^2-11x+7)e^{-x}$

$=(-2x^2+15x-18)e^{-x}$

$=(-2x+3)(x-6)e^{-x}$

(b). 當 $\frac{d^2y}{dx^2}=0$， $x=\frac{3}{2}$ 或 $x=6$

x	$x<\frac{3}{2}$	$x=\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}<x<6$	$x=6$	$x>6$
$\frac{d^2y}{dx^2}$	$-$	0	$+$	0	$-$

∴ $y=(7x-2x^2)e^{-x}$ 有兩拐点

∴ 同意宣稱

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

5. 設 n 為大於 1 的整數。定義 $(a+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\mu_k x^k$ ，其中 a 為一常數。已知 $\mu_2=-10$ 。

$n>1$

(a) 解釋為什麼 a 是一負數及 n 是一奇數。

$-1 \quad 1$

(b) 設 $(bx-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k x^k$ ，其中 b 為一常數。若 $\lambda_0=\mu_0$ 及 $\lambda_1=2\mu_1$ ，求 a 、 b 及 n 。

(6 分)

(a). $(a+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\mu_k x^k$

$a^n+C_1^n a^{n-1}x+C_2^n a^{n-2}x^2+\cdots=\mu_0+\mu_1 x+\mu_2 x^2+\cdots$

$\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}=-10$

$\frac{n(n-1)}{2}>0 \quad \because (n>1)$

$\therefore a^{n-2}<0$

$\therefore a<0$ ， $\therefore a$ 為負數.

當 n 為雙數， $a^{n-2}>0$ ，矛盾產生

$\therefore$ $n-2$ 必為奇數

$\therefore$ n 必為奇數

(b). $(bx-1)^n=(-1+bx)^n$

$\sum_{k=0}^{n}\lambda_k x^k=(-1+bx)^n$

$\lambda_0+\lambda_1 x+\lambda_2 x+\cdots=(-1)^n+C_1^n(-1)^{n-1}(bx)+C_2^n(-1)^{n-2}(b^2x^2)+\cdots$

$=-1+nbx-\frac{n(n-1)}{2}b^2x^2+\cdots$

$\lambda_0=\mu_0=-1=a^n \quad \therefore a=-1$

$\lambda_1=2\mu_1$

$nb=2na^{n-1}$

$b=a^{n-1}$

$b=(-1)^{n-1}$

$b=1$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$\mu_2 = -10$

$\frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} = -10$

$\frac{n(n-1)}{2} (-1)^{n-2} = -10$

$\frac{n(n-1)}{2} = 10$

$n^2 - n - 20 = 0$

$(n-5)(n+4) = 0$

$n = 5$ 或 $n = -4$ (捨去)

$\therefore a = -1, \ b = 1, \ n = 5$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

6. ~~(a)~~ 利用代換積分法，證明 $\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + $ 常數 。

~~(b) 在曲線 G 上的任意點 (x, y) ， G 的切線的斜率為 $\frac{2x+1}{x^2+2x+5}$ 。 已知 G 通過點 $(-3, \ln 2)$ ， G 是否通過點 $\left(-1, \frac{-\pi}{8}\right)$ ？ 解釋你的答案。~~

(7 分)

(a). $\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+2^2}$

設 $x+1 = 2\tan\theta$

$dx = 2\sec^2\theta \, d\theta$

$= \int \frac{2\sec^2\theta \, d\theta}{(2\tan\theta)^2+2^2}$

$= \int \frac{2\sec^2\theta}{4(\tan^2\theta+1)} d\theta$ $\quad (\because \tan^2\theta+1 = \sec^2\theta)$

$= \frac{1}{2}\int d\theta$

$= \frac{\theta}{2} + C$

$\frac{x+1}{2} = \tan\theta$

$\theta = \tan^{-1}\frac{x+1}{2}$

$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$ ， C 是常數

(b). $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{x^2+2x+5}$

$y = \int \frac{2x+1}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx - \int \frac{1}{x^2+2x+5}dx$

$= \int \frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5} - \int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

$= \ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + K$

K 是常數、

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$\because$ G通過 $(-3, \ln 2)$.

$\therefore \ln 2 = \ln((-3)^2 + 2(-3) + 5) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{-3+1}{2}\right) + K$

$= \ln 8 - \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + K$

$K = \ln 2 - \ln 8 - \frac{\pi}{8}$

$= \ln \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}$

$= -\frac{\pi}{8} - \ln 4$.

$\therefore \quad y = \ln(x^2 + 2x + 5) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) - \ln 4 - \frac{\pi}{8}$

當 $x = -1$, $y = \ln((-1)^2 + 2(-1) + 5) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{-1+1}{2}\right) - \ln 4 - \frac{\pi}{8}$

$= -\frac{\pi}{8}$

$\therefore$ G通過 $\left(-1, -\frac{\pi}{8}\right)$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

7. 考慮曲線 $\Gamma: y=\ln(x+2)$， 其中 $x>0$。 設 P 為 Γ 上的一動點且 h 為其 x 坐標。 將 Γ 在 P 的切線記為 L，且將 Γ、L 與 y 軸圍成的區域的面積記為 A 平方單位。

(a) 證明 $A=\dfrac{h^2+4h}{2h+4}-2\ln(h+2)+2\ln 2$。

(b) 若 $h=3^{-t}$，其中 t 是以秒為單位的時間，求當 $t=1$ 時 A 的變率。

(8 分)

(a) $P:(h, \ln(h+2))$

$y=\ln(x+2)$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+2}$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=h}=\frac{1}{h+2}$

$L: \frac{y-\ln(h+2)}{x-h}=\frac{1}{h+2}$

$(h+2)y-(h+2)\ln(h+2)=x-h$

$y=\frac{x}{h+2}+\ln(h+2)-\frac{h}{h+2}$

$A=\int_0^h\left[\frac{x}{h+2}+\ln(h+2)-\frac{h}{h+2}-\ln(x+2)\right]dx$

$=\left[\frac{x^2}{2(h+2)}+x\ln(h+2)-\frac{hx}{h+2}-(x+2)\ln(x+2)-(x+2)\right]_0^h$

$=\left[\frac{h^2}{2h+4}+h\ln(h+2)-\frac{h^2}{h+2}-(h+2)\ln(h+2)-(h+2)\right]-(-2\ln 2-2)$

$=\frac{-h^2}{2h+4}+2\ln(h+2)+(h+2)\quad+2\ln 2-2$

$=\frac{-h^2+(h+2)(2h+4)-2(2h+4)}{2h+4}$

$=\frac{h^2+4h}{2h+4}-2\ln(h+2)+2\ln 2.$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(b). $h=3^{-t}$

$\frac{dh}{dt}=-\ln 3\ (3^{-t})$ 當 $t=1$, $h=\frac{1}{3}$.

$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{t=1}=-\ln 3\cdot(3^{-1})$

$=-\frac{1}{3}\ln 3.$

$A=\frac{h^2+4h}{2h+4}-2\ln(h+2)+2\ln 2.$

$\frac{dA}{dt}=\left[\frac{(2h+4)^2-2(h^2+4h)}{(2h+4)^2}-\frac{2}{h+2}\right]\frac{dh}{dt}.$

$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=1}=\left[\frac{(\frac{2}{3}+4)^2-2(\frac{1}{9}+\frac{4}{3})}{(2(\frac{1}{3})+4)^2}-\left(\frac{2}{\frac{1}{3}+2}\right)\right]\left(-\frac{1}{3}\ln 3\right)$

$=\frac{1081}{294}\left(-\frac{1}{3}\ln 3\right)$

$=\frac{-1081}{882}\ln 3.$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$-x+2y-z=-8$

8. 考慮實變數 x, y, z 的線性方程組

$$(E):\begin{cases} ax + 2y - z = 4k \\ -x + ay + 2z = 4 \\ 2x - y + az = k^2 \end{cases}，其中\ a, k \in \mathbf{R}\ 。$$

(a) 假設 (E) 有唯一解。 以 a 及 k 表 y。

(b) 假設 (E) 有無限多個解。 解 (E)。

(7 分)

(a). $\det(E)=\begin{vmatrix} a & 2 & -1 \\ -1 & a & 2 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix}$

$=a^3+8-1+2a+2a+2a$

$=a^3+6a+7.$

$=(a+1)(a^2-a+7)$

∵有唯一解， $a\neq-1$

$y=\dfrac{\Delta y}{\Delta}=\dfrac{\begin{vmatrix} a & 4k & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & k^2 & a \end{vmatrix}}{(a+1)(a^2-a+7)}$

$=\dfrac{4a^2+16k+k^2+8-2k^2a+4ka}{(a+1)(a^2-a+7)}$

$=\dfrac{4a^2+(1-2a)k^2+(16+4a)k+8}{(a+1)(a^2-a+7)}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(b). ~~a ≠~~ $a=-1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 4k \\ -1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & k^2 \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4k \\ -1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & k^2 \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4k \\ 0 & -3 & 3 & 4-4k \\ 0 & 3 & -3 & k^2+8k \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4k \\ 0 & 1 & -1 & \frac{4k-4}{3} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{k^2+8k}{3} \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4k \\ 0 & 1 & -1 & \frac{4k-4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k^2+4k+4}{3} \end{array}\right)$$

∵ 有無限解

∴ $k^2+4k+4=0$

$k=-2$

$$\therefore (E):\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t-4 \\ t \end{pmatrix}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

乙部（50 分）

9. 設 $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x-1}$，其中 $x\neq 1$。將 $y=f(x)$ 的圖像記為 H。

(a) 求 H 的漸近線。 (3 分)

(b) 求 H 的極大點及極小點。 (4 分)

(c) 描繪 H。 6 4.45. (3 分)

(d) 設 R 為 H 與直線 $y=10$ 圍成的區域。求 R 繞直線 $y=10$ 旋轉所得的旋轉體的體積。 (3 分)

(a). $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x-1}$

$=x+4+\dfrac{4}{x-1}$

∴ H的垂直漸近線是 $x=1$.

H的斜漸近線是 $y=x+4$.

(b). $f'(x)=1-\dfrac{4}{(x-1)^2}$

$f'(x)=0$ 當 $(x-1)^2=4$

$x=3$ 或 $x=-1$

x	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<3$	$x=3$	$x>3$.
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	/	1	/	9	/

∴ H 極大点：$(-1,1)$

H 極小点：$(3,9)$.

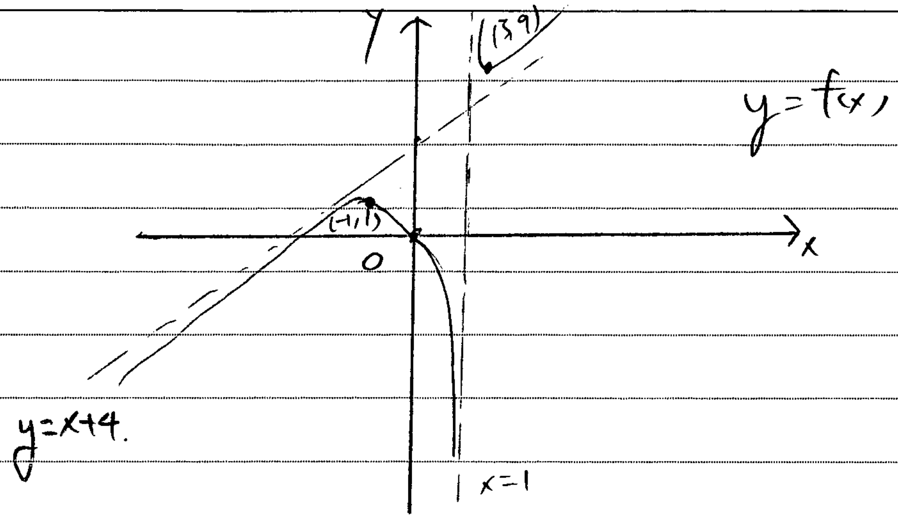
寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

+28x.

(c).



(d). ~~V=π~~ 當 $y=10$, $\frac{x^2+3x}{x-1}=10$

$x^2-7x+10=0$

$x=2$ 或 $x=5$.

$$V=\pi\int_2^5\left(10-\frac{x^2+3x}{x-1}\right)^2dx$$

$$=\pi\int_2^5\left(10-(x+4)+\frac{4}{x-1}\right)^2dx$$

$$=\pi\int_2^5\left(-x+\frac{4}{x-1}+6\right)^2dx$$

$$=\pi\int_2^5\left[x^2-\frac{8x}{x-1}+\frac{48}{x-1}-12x+\frac{16}{(x-1)^2}+36\right]dx.$$

$$=\pi\int_2^5\left[x^2-\frac{8(x-1)}{x-1}+\frac{40}{x-1}-12x+\frac{16}{(x-1)^2}+36\right]dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^3}{3}-8x+40\ln(x-1)-6x^2-16(x-1)^{-1}+36x\right]_2^5$$

$$=\pi\left[\left(\frac{125}{3}+140+40\ln4-150-4\right)-\left(\frac{8}{3}+56-24-16\right)\right]$$

$$=\pi(9+40\ln4)$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

10. 設 $g(x)=\cos^2 x\cos 2x$ 。

(a) 證明 $\int g(x)\,dx=\frac{\sin 2x\cos^2 x}{2}+\frac{1}{2}\int \sin^2 2x\,dx$ 。 (2 分)

(b) 計算 $\int_0^{\pi} g(x)\,dx$ 。 1.570796. (2 分)

(c) 利用代換積分法，計算 $\int_0^{\pi} xg(x)\,dx$ 。 1.233700 $\frac{\pi^2}{8}$ (4 分)

(d) 計算 $\int_{-\pi}^{2\pi} xg(x)\,dx$ 。 3.7011 (4 分)

(a). $g(x)=\cos^2 x\cos 2x$.

$\int g(x)dx=\int \cos^2 x\cos 2x\,dx$

$=\frac{1}{2}\int \cos^2 x\,d\sin 2x$

$=\frac{1}{2}\sin 2x\cos^2 x-\frac{1}{2}\int \sin 2x(-2\sin x\cos x)dx$

$=\frac{\sin 2x\cos^2 x}{2}+\frac{1}{2}\int \sin 2x\sin 2x\,dx$

$=\frac{\sin 2x\cos^2 x}{2}+\frac{1}{2}\int \sin^2 2x\,dx$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(b). $\int_0^{\pi} g(x)\,dx = \frac{\sin 2x \cos^2 x}{2}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^2 2x\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8}\right]_0^{\pi}$

$= \frac{\pi}{4}.$

(c). $\int_0^{\pi} x g(x) dx$

$= \int_0^{\pi} x\, d\int g(x)$

$= \left[x\int_0^{\pi} g(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} g(x)\,dx$

$= \left[\frac{\pi x}{4}\right]_0^{\pi} - \frac{\pi}{4}$

$= \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{4}.$

$= \left[x\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8}\right)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8}\right)dx$

$= \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} + \frac{\cos 4x}{32}\right)_0^{\pi}$

$= \frac{\pi^2}{4} - \left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{64} - \frac{1}{64}\right)$

$= \frac{\pi^2}{8}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

d). $\int_{-\pi}^{2\pi} xg(x)dx$ $\qquad$ $xg(x)$ is odd function

∵ $(g(-x) = g(x))$

$-xg(-x) = -(xg(x))$

$= \int_{-\pi}^{0} xg(x)dx + \int_{0}^{\pi} xg(x)dx + \int_{\pi}^{2\pi} xg(x)dx$

$= -\int_{\pi}^{0} (-x)g(x)dx + \int_{0}^{\pi} xg(x)dx + \int_{\pi}^{2\pi} xg(x)dx$

$= 2$

d. $\int_{-\pi}^{2\pi} xg(x)dx$

$= 3\int_{0}^{\pi} xg(x)dx$

$= \frac{3\pi^2}{8}$

Let $p(x) = xg(x)$.

$p(-x) = -xg(-x)$

$= -xg(x)$

$= -p(x)$

$\therefore$ $p(x)$ is 奇函數.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

11. (a) 設 n 為一正整數。 將 2×2 單位矩陣記為 I。

(i) 設 A 為一 2×2 矩陣。化簡 $(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^n)$ 。

(ii) 設 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ ，其中 θ 不是 2π 的倍數。

已知 $A^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$ 。

(1) 證明 $(I-A)^{-1}=\dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2} & -\cos\frac{\theta}{2}\\ \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$ 。

(2) 利用 (a)(i) 的結果及 (a)(ii)(1)，

證明 $I+A+A^2+\cdots+A^n=\dfrac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix}\cos\frac{n\theta}{2} & -\sin\frac{n\theta}{2}\\ \sin\frac{n\theta}{2} & \cos\frac{n\theta}{2}\end{pmatrix}$ 。

(7 分)

(b) 利用 (a)(ii)，計算

(i) $\cos\frac{5\pi}{18}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{6}+\cdots+\cos 25\pi$ ；

(ii) $\cos^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{2\pi}{7}+\cos^2\frac{3\pi}{7}+\cdots+\cos^2 7\pi$ 。

(6 分)

11(a). $(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^n)=(I+A+A^2+\cdots+A^n)-(A+A^2+\cdots A^{2n})$

$=I-(A^{n+1}+A^{n+2}+\cdots+A^{2n})$.

$=I-A^n(A+A^2+\cdots+A^n)$.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(ii). $(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1-\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix}^{-1}$

$$= \frac{1}{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\begin{pmatrix} 1-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix}^{T}$$

$$= \frac{1}{2-2\cos\theta}\begin{pmatrix} 1-\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sin\theta}{2-2\cos\theta} \\ \frac{\sin\theta}{2-2\cos\theta} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} & \frac{-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{2-2\cos\theta} \\ \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{2-2\cos\theta} & \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} & \frac{-2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\theta} \\ \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\theta} & \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} & -\cos\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$\frac{5}{18} \cdot ? = 2T.$

(2). $(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^n) = I-A^n(A+A^2+\cdots+A^n)$ 兩边乘 $(I-A)^{-1}$

$I+A+A^2+\cdots+A^n = (I-A)^{-1}(I-A^n(A+A^2+\cdots+A^n))$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

b(i) $+\cos\frac{5\pi}{18}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{6}+\cdots+\cos 25\pi$

$=\sin\frac{(90+1)\frac{5\pi}{18}}{2}\cos\frac{90(\frac{5\pi}{18})}{2}$

$=\sin\frac{(25\pi+\frac{5\pi}{18})}{2}\cos\frac{25\pi}{2}$

$=\sin\left(\frac{25\pi+\frac{5\pi}{18}}{2}\right)\cos\left(12\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $\left(\cos\frac{\pi}{2}=0\right)$

$=0$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

12. 考慮 ΔABC。 將原點記為 O。

(a) 設 D 為 BC 上的一點使得 AD 為 $\angle BAC$ 的角平分線。 定義 $BC = a$ 、 $AC = b$ 及 $AB = c$。

(i) 利用 $BD : DC = c : b$ 這事實，證明 $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{OA} + \frac{b}{b+c}\overrightarrow{OB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{OC}$。

(ii) 設 E 為 AC 上的一點使得 BE 為 $\angle ABC$ 的角平分線。
定義 $\overrightarrow{OJ} = \frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$。
證明 J 在 AD 上。 由此，推證 AD 與 BE 相交於 J。

(7 分)

(b) 假定 $\overrightarrow{OA} = 35\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + \mathbf{k}$ 、 $\overrightarrow{OB} = 40\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ 及 $\overrightarrow{OC} = -3\mathbf{j} + \mathbf{k}$。 設 I 為 ΔABC 的內心。

(i) 求 $\overrightarrow{OI}$。

(ii) 藉考慮 $\overrightarrow{AI} \times \overrightarrow{AB}$，求 ΔABC 的內切圓的半徑。

(5 分)

(a)(i) $\overrightarrow{AD} = \frac{c\overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{AB}}{b+c}$

$= \frac{1}{b+c}\left(c(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) + b(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})\right)$

$= \frac{1}{b+c}\left((b+c)(-\overrightarrow{OA}) + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}\right)$

$= -\overrightarrow{OA} + \frac{b}{b+c}\overrightarrow{OB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{OC}$

(ii) $\overrightarrow{OJ} = \frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$

$\frac{-1}{\frac{a}{a+b+c}} = \frac{a+b+c}{-a} = -1 - \frac{b+c}{a}$

$\frac{\frac{b}{b+c}}{\frac{b}{a+b+c}} = \frac{b(a+b+c)}{b(b+c)} = \frac{a+b+c}{b+c}$

$= 1 + \frac{a}{b+c}$

$$\frac{\frac{c}{b+c}}{\frac{c}{a+b+c}} = \frac{a+b+c}{b+c} = 1 + \frac{a}{b+c}$$

h

c(ii) $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OA}$

$= \frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$

$= -\frac{b+c}{a+b+c}\overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$

$\because \frac{-1}{\frac{-b+c}{a+b+c}} = \frac{\frac{b}{b+c}}{\frac{b}{a+b+c}} = \frac{\frac{c}{b+c}}{\frac{c}{a+b+c}} = 1 + \frac{a}{b+c}$

$\therefore$ AJ // AD

$\therefore$ J在AD上

b(i). I為內心，I為 a部 的J.

$\vec{OI} = \vec{OJ}$

$\vec{AC} = -35\vec{i} - 12\vec{j}$

$\vec{AB} = 5\vec{i} - 12\vec{j}$

$BC = -40\vec{i}$

$|\vec{AC}| = 37 = b$

$|\vec{AB}| = 13 = c$

$|\vec{BC}| = 40 = a$.

$a+b+c = 90$

$\therefore \vec{OI} = \frac{40}{90}\vec{OA} + \frac{37}{90}\vec{OB} + \frac{13}{90}\vec{OC}$

$= 32\vec{i} + \frac{73}{3}\vec{j} + \vec{k}$

(ii). $\cancel{\vec{AI} \times \vec{A}}$ $\vec{AI} = \vec{OI} - \vec{OA}$

$= -3\vec{i} - \frac{20}{3}\vec{j}$

$\vec{AI} \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -\frac{20}{3} & 0 \\ 5 & -12 & 0 \end{vmatrix} = -36\vec{k} + \frac{100}{3}\vec{k}$

$= -\frac{8}{3}\vec{k}$

– 試卷完 –

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。