目　錄

第二級
示例一

2022-DSE
數學 延伸部分
單元二

香 港 考 試 及 評 核 局
2 0 2 2 年 香 港 中 學 文 憑 考 試

請在此貼上電腦條碼

考生編號									

數學　延伸部分
單元二（代數與微積分）
試題答題簿

本試卷必須用中文作答
兩小時三十分鐘完卷
（上午八時三十分至上午十一時）

考生須知

(一) 宣布開考後，考生須首先在第 1 頁之適當位置填寫考生編號，並在第 1、3、5、7、9、11 及 13 頁之適當位置貼上電腦條碼。

(二) 本試卷分**兩部**，即甲部和乙部。

(三) 本試卷**各題均須作答**，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。不可在各頁邊界以外位置書寫。寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(四) 如有需要，可要求派發方格紙及補充答題紙。每張紙均須填寫考生編號、填畫試題編號方格、貼上電腦條碼，並用繩縛於**簿內**。

(五) 除特別指明外，須詳細列出所有算式。

(六) 除特別指明外，數值答案須用真確值表示。

(七) 試場主任宣布停筆後，考生不會獲得額外時間貼上電腦腦條碼及填畫試題編號方格。

A032C001

參考公式

$\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B$	$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
$\cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B$	$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$
$\tan(A\pm B)=\frac{\tan A\pm\tan B}{1\mp\tan A\tan B}$	$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$	$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$
$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$	$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$
$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$	$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

$\sin 2\theta\sin\theta = \cos\theta - \frac{\cos 4\theta}{2}$

****

甲部（50 分）

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

1. 設 $g(x)=\frac{1}{\sqrt{5x+4}}$ ，其中 $x>0$ 。證明 $g(1+h)-g(1)=\frac{-5h}{3\sqrt{5h+9}\,(3+\sqrt{5h+9})}$ 。由此，從基本原理求 $g'(1)$ 。 (4 分)

$$g(1+h)-g(1)=\frac{1}{\sqrt{5(1+h)+4}}-\frac{1}{\sqrt{5+4}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5+5h+4}}-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{9+5h}}-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{3}{3\sqrt{9+5h}}-\frac{\sqrt{9+5h}}{3\sqrt{9+5h}}$$

$$=\frac{3-\sqrt{5h+9}}{3\sqrt{5h+9}}$$

$$=\frac{(3-\sqrt{5h+9})(3+\sqrt{5h+9})}{(3\sqrt{5h+9})(3+\sqrt{5h+9})}$$

$$=\frac{-5h}{3\sqrt{5h+9}(3+\sqrt{5h+9})}$$

$$g'(1)$$

$$=\frac{-5}{3\sqrt{5(0)+9}(3+\sqrt{5(0)+9})}$$

$$=\frac{-5}{3\sqrt{14}(3+\sqrt{14})}$$

$$=\frac{-5}{9\sqrt{14}+42}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

2. 設 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$ 。

(a) 證明 $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=1+\sec\theta\csc\theta$ 。

(b) 解方程 $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=5$ 。

(5 分)

(a) $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}$

$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{1}{1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\times\frac{1}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{\sin\theta}{\sin\theta-\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\times\frac{\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)}+\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta(\cos\theta-\sin\theta)}$

$=\frac{\sin^3\theta-\cos^3\theta}{\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)}$

$=$

(b) $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=5$

$1+\sec\theta\operatorname{cosec}\theta=5$

$\sec\theta\operatorname{cosec}\theta=4$

$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$4\sin\theta\cos\theta=1$

$\sin2\theta+\sin2\theta=1$

$\sin2\theta=\frac{1}{2}$

$\theta_1=\frac{\pi}{12}$

$\theta_2=\frac{11\pi}{12}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

3. (a) 利用數學歸納法，證明對所有正整數 n， $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2 = n(2n+1)$ 。

(b) 利用 (a)，計算 $\sum_{k=11}^{100}(-1)^k k^2$ 。

(7 分)

設命題 $P(n)$ = $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2 = n(2n+1)$

~~其~~ 由 n為一正整數

當n=1時

左方 = $\sum_{k=1}^{2}(-1)^k k^2$ 右方 = $1(2\times1+1)$

$= 3$

$= (-1)^1(1)^2 + (-1)^2(2)^2$

$= 3$

∴左方=右方

∴P(1)成立

假設有某正整數H，P(H)成立，即 $\sum_{k=1}^{2H}(-1)^k k^2 = H(2H+1)$

當n=H+1時

左方 = $\sum_{k=1}^{2(H+1)}(-1)^k k^2$

$= \sum_{k=1}^{2H}(-1)^k k^2 + (-1)^{2H+2}(2H+2)^2 + (-1)^{2H+1}(2H+1)^2$

$= H(2H+1) + (-1)^{2H}(2H+2)^2 - (-1)^{2H}(2H+1)^2$

$= H(2H+1) + (2H+2)^2 - (2H+1)^2$

$= 2H^2 + 5H + 3$

$= (H+1)(2H+3)$

右方 = $(H+1)(2(H+1)+1)$

$= (H+1)(2H+3)$

∴左方=右方

∴ ~~P(H)~~ P(H+1)成立

根據數學歸納法
對於所有正整n
P(n)成立

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

4. 設 $y=(7x-2x^2)e^{-x}$ 。

(a) 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 。

(b) 某人宣稱 $y=(7x-2x^2)e^{-x}$ 的圖像有兩拐點。 你是否同意？ 解釋你的答案。

(6 分)

(a) $y=(7x-2x^2)e^{-x}$

$\frac{dy}{dx}=(7-4x)e^{-x}+(-e^{-x})(7x-2x^2)$

$\frac{d^2y}{dx^2}=-4(e^{-x})-e^{-x}(7-4x)+e^{-x}(7x-2x^2)+(-4x+7)(-e^{-x})$

(b) $y=(7x-2x^2)e^{-x}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=0$

$-4(e^{-x})-e^{-x}(7-4x)+e^{-x}(7x-2x^2)+(-4x+7)(-e^{-x})=0$

$-e^{-x}(4+7-4x-7x+2x^2-4x+7)=0 \Rightarrow -e^{-x}(2x^2-15x+18)=0$

(捨去) $-e^{-x}=0$ ， $2x^2+(-15x)+18=0$

$x_1=6 \quad x_2=1.5$

	$x<1.5$	$x=1.5$	$1.5<x<6$	$x=6$	$x>6$
$\frac{d^2y}{dx^2}$	$-$	0	$+$	0	$-$

當 $x=1.5$ ，或 $x=6$ 時出現拐點，

∴圖像有兩拐點，同意

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

5. 設 n 為大於 1 的整數。 定義 $(a+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\mu_k x^k$ ，其中 a 為一常數。 已知 $\mu_2=-10$ 。

(a) 解釋為什麼 a 是一負數及 n 是一奇數。

(b) 設 $(bx-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k x^k$ ，其中 b 為一常數。 若 $\lambda_0=\mu_0$ 及 $\boxed{\lambda_1=2\mu_1}$ ，求 a 、 b 及 n 。

(6 分)

(a) 當 $u_2=-10$

∴ 當 $k=2$ 時，$u_2=-10$

∴ $u_2x^2=-10x^2$

∵ $(a+x)^n$ 中 x 的系數為正，但二次方值為負

∴ a 一定為負數

當 $k=2$ 時，u_k 的次方為 $(n-2)$ 次方 因為 $n-2$ 為奇數

∵ $2+(n-2)$ 一定會是奇數

∴ n 為奇數

(b) $(bx-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k x^k$

$\sum_{k=0}^{n}\lambda_0 x^0=(-1)^n$

$=-1$

$\sum_{k=0}\lambda_1 x=2u_1$

$(bx)^{n-1}=2u_1$

$C_2^n \times a^{n-2}=-10$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

6. (a) 利用代換積分法，證明 $\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) +$ 常數 。

(b) 在曲線 G 上的任意點 (x, y) ， G 的切線的斜率為 $\frac{2x+1}{x^2+2x+5}$ 。 已知 G 通過點 $(-3, \ln 2)$ ， G 是否通過點 $\left(-1, \frac{-\pi}{8}\right)$ ？ 解釋你的答案。

(7 分)

(a) $\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$

$= \int \frac{1}{(x+1)^2+4}\,dx$

設 $2(x+1) = \tan\theta$

$\sec^2\theta\, d\theta = 2dx$

$= \int \frac{1}{(1+\tan^2\theta)} \frac{\sec^2\theta}{2}\,d\theta$

$= \int \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta} \times \frac{1}{2}\,d\theta$

$= \int \frac{1}{2}\,d\theta$

$= \left[\frac{1}{2}\theta\right] + C$ (C為常数)

$= \frac{1}{2}\times\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$

(b) $\int \frac{(2x+1)}{(x^2+2x+5)}\,dx$

$= \int (2x+1)\,dx + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$

$= x^2 + x + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$

$9 + (-3) + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{-3+1}{2}\right) + C = \ln 2$

$C = \ln 2 + 16.5$

$\therefore G: x^2 + x + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + \ln 2 + 16.5$

當 $x = (-1)$ 時

$y = 17.1931 4718$

$-\frac{\pi}{8} = -0.3926 99081$

$-\frac{\pi}{8} \neq y$

$\therefore$ G不通過点 $(-1, -\frac{\pi}{8})$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

~~P~~ $P(h, \ln(h+2))$

7. 考慮曲線 $\Gamma: y=\ln(x+2)$，其中 $x>0$。設 P 為 Γ 上的一動點且 h 為其 x 坐標。將 Γ 在 P 的切線記為 L，且將 Γ、L 與 y 軸圍成的區域的面積記為 A 平方單位。

(a) 證明 $A=\dfrac{h^2+4h}{2h+4}-2\ln(h+2)+2\ln 2$。

(b) 若 $h=3^{-t}$，其中 t 是以秒為單位的時間，求當 $t=1$ 時 A 的變率。

(8 分)

(a) $P(h, \ln(h+2))$

$y=\ln(x+2)$

$e^y=x+2$

$x=e^y-2$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+2}$

$\frac{dy}{dx}\Big|_h=\frac{1}{h+2}$

$y=\frac{1}{h+2}x+c$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

8. 考慮實變數 x, y, z 的線性方程組

$$(E):\begin{cases} ax + 2y - z = 4k \\ -x + ay + 2z = 4 \\ 2x - y + az = k^2 \end{cases}\text{，其中 } a, k \in \mathbf{R}\text{。}$$

(a) 假設 (E) 有唯一解。以 a 及 k 表 y。

(b) 假設 (E) 有無限多個解。解 (E)。

(7 分)

(a) (E): $D_{(E)}$: $\begin{vmatrix} a & 2 & -1 \\ -1 & a & 2 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix}$

$= a^3 - 1 + 8 + 2a + 2a + 2a$

$= a^3 + 8a + 7$

∵ 有唯一解 ∴ $a^3 + 8a + 7 \neq 0$

$D_y = \begin{vmatrix} a & 4 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & k^2 & a \end{vmatrix}$

$= 4a^2 + k^2 + 16 + 8 - 2ak^2 + 4a$

$= \cancel{2ak^2}\ (1-2a)k^2 + 4a^2 + 4a + 24$

∴ $y = \dfrac{D_y}{D_E} = \dfrac{4a^2 + 4a + 24 + (1-2a)k^2}{a^3 + 8a + 7}$

(b) 另 ∵ 有無限多解

∴ $a^3 + 8a + 7 = 0$

$a(a^2 + 8a) = -7$

$(E) = \left[\begin{array}{ccc|c} a & 2 & -1 & 4k \\ -1 & a & 2 & 4 \\ 2 & -1 & a & k^2 \end{array}\right]$

$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} a & 2 & -1 & 4k \\ 0 & a^2+2 & 2a-1 & 4a+4k \end{array}\right]$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

乙部（50 分）

9. 設 $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x-1}$ ，其中 $x \neq 1$ 。將 $y = f(x)$ 的圖像記為 H 。

(a) 求 H 的漸近線。 (3 分)

(b) 求 H 的極大點及極小點。 (4 分)

(c) 描繪 H 。 (3 分)

(d) 設 R 為 H 與直線 $y = 10$ 圍成的區域。求 R 繞直線 $y = 10$ 旋轉所得的旋轉體的體積。 (3 分)

(a) $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x-1} = x+4+\dfrac{4}{x-1}$

∴斜~~有~~漸近线為 $y=x+4$

~~垂~~ ~~垂~~ 垂直漸近线為 $x=1$

(b) $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(x-1)-x^2-3x}{(x-1)^2}$　　當 $f'(x)=0$

$= \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$　　$\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}=0$

$= \dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$　　$x_1=3$　$x_2=-1$

	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<1$	$x=1$	$1<x<3$	$x=3$	$x>3$
$f'(x)$	+	0	−	不定	−	0	+

當 $x=-1$ 時，$y=1$

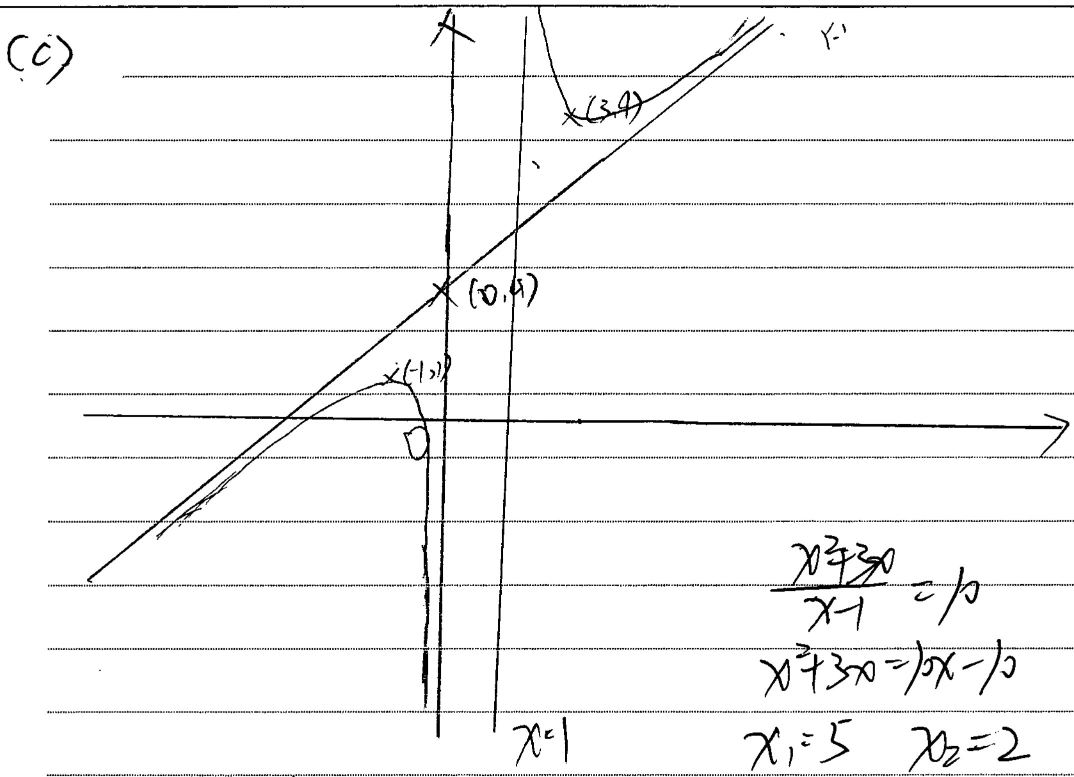
$x=3$，$y=9$

∴極大點為 $(-1,1)$

極小點為 $(3,9)$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(c)



$$\frac{x^2+3x}{x-1}=10$$

$$x^2+3x=10x-10$$

$$x_1=5 \quad x_2=2$$

(d) 體積 $=\pi\int_2^5\left(\frac{x^2+3x}{x-1}+10\right)^2 dx$

$$=\pi\int_2^5\left(\frac{(x^2+3x)^2}{(x-1)^2}+20\frac{x^2+3x}{x-1}+100\right)dx$$

設 $u=x-1$

$du=dx$

當 $x=5$, $u=4$

$x=2$, $u=1$

$$=\pi\int_1^4\left(\frac{((u+1)^2+3(u+1))^2}{u^2}+20\frac{(u+1)^2+3(u+1)}{u}+100\right)du$$

$$=\pi\int_1^4\left(\frac{(u^2+u-4)^2}{u^2}+20\frac{(u-1)(u+2)}{u}+100\right)du$$

$$=\pi\int_1^4\left(u^2+2u-3-12u^{-1}+\frac{16}{u^2}+u+1-\frac{2}{u}+100\right)du$$

$$=\pi\left[\frac{u^3}{3}+\frac{2u^2}{2}-3u-12\ln u\right.$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

10. 設 $g(x)=\cos^2 x\cos 2x$ 。

(a) 證明 $\int g(x)\,dx=\frac{\sin 2x\cos^2 x}{2}+\frac{1}{2}\int \sin^2 2x\,dx$ 。 (2 分)

(b) 計算 $\int_0^{\pi} g(x)\,dx$ 。 (2 分)

(c) 利用代換積分法，計算 $\int_0^{\pi} xg(x)\,dx$ 。 (4 分)

(d) 計算 $\int_{-\pi}^{2\pi} xg(x)\,dx$ 。 (4 分)

(a) $\int g(x)\,dx=\int \cos^2 x\cos 2x\,dx$

$=\int \cos x\cos 2x\,d\sin x$

$=$

(b) $\int_0^{\pi} g(x)\,dx$

$=\left[\frac{\sin 2x(\cos^2 x)}{2}\right]_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 2x\,dx$

$=0+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{-\cos 4x}{2}\right)dx$

$=0+\frac{1}{4}\left[-\sin 4x\right]_0^{\pi}$

$=0$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(c) $\int_0^{\pi} x g'(x)\, dx$

$= \int_0^{\pi} x \cos^2 x \cos 2x\, dx$

$=$

写於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

11. (a) 設 n 為一正整數。將 2×2 單位矩陣記為 I。

(i) 設 A 為一 2×2 矩陣。化簡 $(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^n)$ 。

(ii) 設 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ ，其中 θ 不是 2π 的倍數。

已知 $A^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$ 。

(1) 證明 $(I-A)^{-1}=\dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2} & -\cos\frac{\theta}{2}\\ \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$ 。

(2) 利用 (a)(i) 的結果及 (a)(ii)(1)，

證明 $I+A+A^2+\cdots+A^n=\dfrac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix}\cos\frac{n\theta}{2} & -\sin\frac{n\theta}{2}\\ \sin\frac{n\theta}{2} & \cos\frac{n\theta}{2}\end{pmatrix}$ 。

(7 分)

(b) 利用 (a)(ii)，計算

(i) $\cos\dfrac{5\pi}{18}+\cos\dfrac{5\pi}{9}+\cos\dfrac{5\pi}{6}+\cdots+\cos25\pi$ ；

(ii) $\cos^2\dfrac{\pi}{7}+\cos^2\dfrac{2\pi}{7}+\cos^2\dfrac{3\pi}{7}+\cdots+\cos^2 7\pi$ 。

(6 分)

(a)(i) $(I-A)(I+A+A^2+\cdots A^n)$

$= I+A+A^2+\cdots A^n-A^2-A^3-\cdots-A^{n+1}$

$= I+A+A^n+A^{n+1}$

(ii)(1) $(I-A)^{-1}$ $\quad A^{-1}=\dfrac{1}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

$= I^{-1}-A^{-1}$ $\quad =\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

$= I-A^{-1}$

$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1-\cos\theta & -\sin\theta\\ -\sin\theta & 1-\cos\theta\end{pmatrix}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

12. 考慮 ΔABC。 將原點記為 O。

(a) 設 D 為 BC 上的一點使得 AD 為 $\angle BAC$ 的角平分線。 定義 $BC = a$ 、 $AC = b$ 及 $AB = c$。

(i) 利用 $BD : DC = c : b$ 這事實，證明 $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{OA} + \frac{b}{b+c}\overrightarrow{OB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{OC}$ 。

(ii) 設 E 為 AC 上的一點使得 BE 為 $\angle ABC$ 的角平分線。
定義 $\overrightarrow{OJ} = \frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$ 。
證明 J 在 AD 上。 由此，推證 AD 與 BE 相交於 J。

(7 分)

(b) 假定 $\overrightarrow{OA} = 35\mathbf{i}+9\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 、 $\overrightarrow{OB} = 40\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 及 $\overrightarrow{OC} = -3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 。 設 I 為 ΔABC 的內心。

(i) 求 $\overrightarrow{OI}$ 。

(ii) 藉考慮 $\overrightarrow{AI} \times \overrightarrow{AB}$ ，求 ΔABC 的內切圓的半徑。

(5 分)

(a) $\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB}\times b + \overrightarrow{AC}\times c}{b+c}$ $\qquad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = c$

$\cancel{AD} = \frac{c\times b + b\times c}{b+c}$ $\qquad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = b$

$= c\times\frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c}\times b$

$= (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})\frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})$

$= \overrightarrow{AO}\frac{b}{b+c} + \overrightarrow{OB}\frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AO}\left(\frac{c}{b+c}\right)$

$= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{OC}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

－ **試卷完** －

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

第二級
示例二

2022-DSE
數學 延伸部分
單元二

請在此貼上電腦條碼

香 港 考 試 及 評 核 局
2 0 2 2 年 香 港 中 學 文 憑 考 試

考生編號

數學 延伸部分
單元二（代數與微積分）
試題答題簿

本試卷必須用中文作答
兩小時三十分鐘完卷
（上午八時三十分至上午十一時）

考生須知

(一) 宣布開考後，考生須首先在第 1 頁之適當位置填寫考生編號，並在第 1、3、5、7、9、11 及 13 頁之適當位置貼上電腦條碼。

(二) 本試卷分**兩部**，即甲部和乙部。

(三) 本試卷**各題均須作答**，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。不可在各頁邊界以外位置書寫。寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(四) 如有需要，可要求派發方格紙及補充答題紙。每張紙均須填寫考生編號、填畫試題編號方格、貼上電腦條碼，並用繩縛於**簿內**。

(五) 除特別指明外，須詳細列出所有算式。

(六) 除特別指明外，數值答案須用真確值表示。

(七) 試場主任宣布停筆後，考生不會獲得額外時間貼上電腦條碼及填畫試題編號方格。

A032C001

參考公式

$\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B$	$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
$\cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B$	$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$
$\tan(A\pm B)=\dfrac{\tan A\pm\tan B}{1\mp\tan A\tan B}$	$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$	$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$
$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$	
$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$	

****

甲部（50 分）

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

1. 設 $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5x+4}}$ ，其中 $x>0$ 。證明 $g(1+h)-g(1)=\dfrac{-5h}{3\sqrt{5h+9}\,(3+\sqrt{5h+9})}$ 。由此，從基本原理求 $g'(1)$ 。 (4 分)

$$g(1+h)-g(1)=\frac{1}{\sqrt{5(1+h)+4}}-\frac{1}{\sqrt{9}}$$

$$=\frac{3-\sqrt{5(1+h)+4}}{\sqrt{5(1+h)+4}\,(\sqrt{9})}\left(\frac{3+\sqrt{5(1+h)+4}}{3+\sqrt{5(1+h)+4}}\right)$$

$$=\frac{9-5-5h-4}{3\sqrt{5h+9}\,(3+\sqrt{5h+9})}$$

$$=\frac{-5h}{3\sqrt{5h+9}\,(3+\sqrt{5h+9})}$$

$$g'(1)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5(1+h)+4}}-\frac{1}{\sqrt{9}}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\right)\left(\frac{-5h}{3\sqrt{5h+9}\,(3+\sqrt{5h+9})}\right)$$

$$=\frac{-5}{54}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

2. 設 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$ 。

(a) 證明 $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=1+\sec\theta\csc\theta$ 。

(b) 解方程 $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=5$ 。

(5 分)

a $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}$

$=\tan\theta\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\tan\theta}}\right)+\frac{1-\tan\theta}{\tan\theta}$

$=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1}+\frac{1-\tan\theta}{\tan\theta}$

$=\frac{\tan^2\theta+1-\tan\theta}{\tan\theta-1(\tan\theta)})$

$=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1(\tan\theta)}+\frac{1-\tan\theta}{\tan\theta-1(\tan\theta)}$

$=1+\sec\theta\csc\theta$

b $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=5$

$1+\sec\theta\csc\theta=5$

$1+\frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)=5$

$\frac{1}{\frac{1}{2}\sin2\theta}=4$

$\sin2\theta=\frac{1}{4}(2)$

$\theta=15$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

3. (a) 利用數學歸納法，證明對所有正整數 n ， $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2 = n(2n+1)$ 。

(b) 利用 (a)，計算 $\sum_{k=11}^{100}(-1)^k k^2$ 。

(7 分)

a 設 $P(n)$ 為 $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2 = n(2n+1)$

當 $P(1)$，

左方 $=(-1)^1(1)^2+(-1)^2(2)^2=3$

右方 $=1(2(1)+1)=3$

∵ 左方 = 右方

∴ $P(1)$ 成立

假設 $P(m)$ 對某些正整數成立，

當 $P(m+1)$，

左方 $=\sum_{k=1}^{2(m+1)}(-1)^k k^2$

$=m(2m+1)+\sum_{k=2m}^{2m+1}(-1)^k k^2+\sum_{k=2m}^{2m+2}(-1)^k k^2$

$=m(2m+1)+(-1)^{2m+1}(2m+1)^2+(-1)^{2m+2}(2m+3)^2$

$=m(2m+1)-(2m+1)^2+(2m+3)^2$

$=(2m+1)(2m+2)$

= 右方

∴ $P(m+1)$ 成立

根據數學歸納法，$P(n)$ 對所有正整數成立

b $\sum_{k=11}^{100}(-1)^k k^2$

$=\sum_{k=1}^{100}(-1)^k k^2-\sum_{k=1}^{10}(-1)^k k^2$

$=50(2(50)+1)-5(2(5)+1)$

$=5050-55$

$=4995$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

4. 設 $y=(7x-2x^2)e^{-x}$ 。

(a) 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

(b) 某人宣稱 $y=(7x-2x^2)e^{-x}$ 的圖像有兩拐點。 你是否同意？ 解釋你的答案。

(6 分)

a $\frac{dy}{dx}=(7x-2x^2)e^{-x}+e^{-x}(7-4x)$

$=7xe^{-x}-2x^2e^{-x}+7e^{-x}-4xe^{-x}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=(7x-2x^2)e^{-x}+e^{-x}(7-4x)+e^{-x}(-4)+(7-4x)e^{-x}$

$=7xe^{-x}-2x^2e^{-x}+7e^{-x}-4xe^{-x}-4e^{-x}+7e^{-x}-4xe^{-x}$

$=-xe^{-x}-2x^2e^{-x}+10e^{-x})$

b $\frac{d^2y}{dx^2}=0$

$0=-xe^{-x}-2x^2e^{-x}+10e^{-x})$

$0=e^{-x}(-x-2x^2+10)$

$0=-2x^2-x+10$

$x=\frac{-5}{2}$ 或 $x=2$

$y=-30e^{-\frac{5}{2}}$ $y=6e^{-2}$

x	$x<\frac{-5}{2}$	$\frac{-5}{2}$	$\frac{-5}{2}<x<2$	2	$x>2$
$\frac{d^2y}{dx^2}$	−	0	+	0	−

∴同意

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

5. 設 n 為大於 1 的整數。 定義 $(a+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\mu_k x^k$ ， 其中 a 為一常數。 已知 $\mu_2=-10$ 。

(a) 解釋為什麼 a 是一負數及 n 是一奇數。

(b) 設 $(bx-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k x^k$ ， 其中 b 為一常數。 若 $\lambda_0=\mu_0$ 及 $\lambda_1=2\mu_1$ ， 求 a 、 b 及 n 。

(6 分)

a $(a+x)^n=a^n+C_1^n a^{n-1}x+C_2^n a^{n-2}x^2+\ldots+x^n$

$\sum_{k=0}^{2}\mu_k x^k=\mu_0 x^0+\mu_1 x-10x^2$

$C_2^n a^{n-2}=-10$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

6. (a) 利用代換積分法，證明 $\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)$ + 常數 。

(b) 在曲線 G 上的任意點 (x, y) ， G 的切線的斜率為 $\frac{2x+1}{x^2+2x+5}$ 。 已知 G 通過點 $(-3, \ln 2)$ ， G 是否通過點 $\left(-1, \frac{-\pi}{8}\right)$ ？ 解釋你的答案。

(7 分)

a $\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$ 代 $x=\tan x$

$= \int \frac{1}{\tan^2 x+\tan 2x+5}\,dx$

$= \int \frac{1}{(1-\sec^2 x)+\tan 2x+5}\,dx$

$= \int \frac{1}{(1-\sec^2 x)}\,dx + \int \frac{1}{\tan 2x+5}\,dx$

b $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+5}\,dx$

$= 2x+1 \int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$

$= (2x+1)\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)+C$

$\ln 2 = (2(-3)+1)\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{-3+1}{2}\right)\right)+C$ 代 $(-3, \ln 2)$ 入 x 及 y

$\ln 2 = -5\left(-\frac{\pi}{8}\right)+C$

$C = -22.6386$

$G = (2x+1)\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)-22.6386$

$= (2(-1)+1)\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{-1+1}{2}\right)\right)-22.6386$ 代 $x=-1$

$= -22.6386$

$\because y = -\frac{\pi}{8}$

$\therefore$ 不通過

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

7. 考慮曲線 $\Gamma: y=\ln(x+2)$，其中 $x>0$。設 P 為 Γ 上的一動點且 h 為其 x 坐標。將 Γ 在 P 的切線記為 L，且將 Γ、L 與 y 軸圍成的區域的面積記為 A 平方單位。

(a) 證明 $A=\dfrac{h^2+4h}{2h+4}-2\ln(h+2)+2\ln 2$。

(b) 若 $h=3^{-t}$，其中 t 是以秒為單位的時間，求當 $t=1$ 時 A 的變率。

(8 分)

a P的坐標為 $(h, \ln(h+2))$

L的斜率 $= \frac{d}{dx}\ln(x+2)$

$= \frac{d}{dx}\ln x+2$

$= \frac{1}{x}$

L的方程 $= y-\ln(h+2)=\frac{1}{x}(x-h)$

$y-\ln(h+2)=1-\frac{h}{x}$

$y=1-\frac{h}{x}+\ln(h+2)$

$A=\int_0^h [1-\frac{h}{x}+\ln(h+2)]^2-[\ln(x+2)]^2\,dx$

$=\int_0^h 1-(\frac{h}{x})^2+(\ln(h+2))^2-(\ln(x+2))^2\,dx$

$=\int_0^h 1-(\frac{h}{x})^2\,dx$

$=[x-(\frac{2hx}{x^2})(\frac{2hx}{x^2})]_0^h$

$=h-(\frac{2h(h)}{(h)^2})(\frac{2h(h)}{(h)^2})$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

8. 考慮實變數 x, y, z 的線性方程組

$$(E): \begin{cases} ax + 2y - z = 4k \\ -x + ay + 2z = 4 \\ 2x - y + az = k^2 \end{cases}$$ ，其中 $a, k \in \mathbf{R}$ 。

(a) 假設 (E) 有唯一解。 以 a 及 k 表 y。

(b) 假設 (E) 有無限多個解。 解 (E)。

(7 分)

a $\Delta = 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} a & 2 \\ -1 & a \end{pmatrix}$

$= a^3 - 3a + 7$

$\Delta y = \begin{pmatrix} a & 4k & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & k^2 & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ k^2 & a \end{pmatrix} - 4k\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & k^2 \end{pmatrix}$

$= 4a^2 - 2ak^2 + 4ka + 16k + k^2 + 8$

$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{4a^2 - 2ak^2 + 4ka + 16k + k^2 + 8}{a^3 - 3a + 7}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

乙部（50 分）

9. 設 $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x-1}$ ，其中 $x\neq 1$ 。將 $y=f(x)$ 的圖像記為 H 。

(a) 求 H 的漸近線。 (3 分)

(b) 求 H 的極大點及極小點。 (4 分)

(c) 描繪 H 。 (3 分)

(d) 設 R 為 H 與直線 $y=10$ 圍成的區域。求 R 繞直線 $y=10$ 旋轉所得的旋轉體的體積。 (3 分)

a 垂直漸近線 $=x=1$

$$\begin{array}{r} x \\ x-1\overline{)\,x^2+3x} \\ \underline{x^2-x} \\ 4x \end{array}$$

$\dfrac{x^2+3x}{x-1}=x+\dfrac{4x}{x-1}$

斜漸近線 $=y=x$

b $f'(x)=\dfrac{(x-1)(2x+3)-(x^2+3x)}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{2x^2+3x-2x-3+x^2-3x}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{-2x-3+x^2}{(x-1)^2}$

$f'(x)=0$

$0=\dfrac{-2x-3+x^2}{(x-1)^2}$

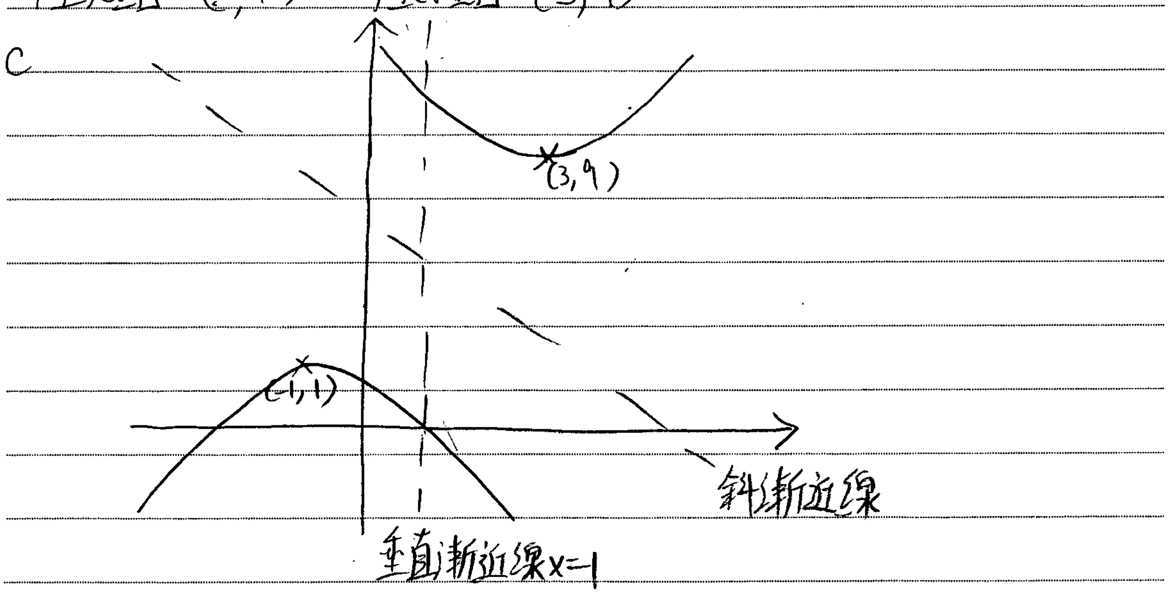
$x=3$ 或 $x=-1$

$y=9$ $y=1$

	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<3$	$x=3$	$x>3$
$f'(x)$	+	0	−	0	+

極大點 $=(-1,1)$ 極小點 $=(3,9)$

c



寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

10. 設 $g(x)=\cos^2 x\cos 2x$ 。

(a) 證明 $\int g(x)\,dx=\dfrac{\sin 2x\cos^2 x}{2}+\dfrac{1}{2}\int \sin^2 2x\,dx$ 。 (2 分)

(b) 計算 $\int_0^{\pi} g(x)\,dx$ 。 (2 分)

(c) 利用代換積分法，計算 $\int_0^{\pi} xg(x)\,dx$ 。 (4 分)

(d) 計算 $\int_{-\pi}^{2\pi} xg(x)\,dx$ 。 (4 分)

a $\int g(x)\,dx$

$= \int \cos^2 x \cos 2x$

$= \int \cos^2 x(1-\cancel{2}\sin^2 x)\,dx$

$= \int \cos^2 x - 2\sin^2 x\cos^2 x\,dx$

$= \int \cos^2 x\,dx - \int \sin^2 2x\,dx$

$= \frac{\sin 2x\cos^2 x}{2} + \frac{1}{2}\int \sin^2 2x\,dx$

b $\int_0^{\pi} g(x)\,dx$

$= \int_0^{\pi} \cos^2 x\cos 2x$

$= \left[\frac{\sin 2x\cos^2 x}{2} + \frac{1}{2}\int \sin^2 2x\,dx\right]_0^{\pi}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

11. (a) 設 n 為一正整數。 將 2×2 單位矩陣記為 I。

(i) 設 A 為一 2×2 矩陣。化簡 $(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^n)$ 。

(ii) 設 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ ，其中 θ 不是 2π 的倍數。

已知 $A^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$ 。

(1) 證明 $(I-A)^{-1}=\dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2} & -\cos\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$ 。

(2) 利用 (a)(i) 的結果及 (a)(ii)(1)，

證明 $I+A+A^2+\cdots+A^n=\dfrac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix}\cos\frac{n\theta}{2} & -\sin\frac{n\theta}{2} \\ \sin\frac{n\theta}{2} & \cos\frac{n\theta}{2}\end{pmatrix}$ 。

(7 分)

(b) 利用 (a)(ii)，計算

(i) $\cos\frac{5\pi}{18}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{6}+\cdots+\cos 25\pi$ ；

(ii) $\cos^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{2\pi}{7}+\cos^2\frac{3\pi}{7}+\cdots+\cos^2 7\pi$ 。

(6 分)

a(i)

(ii) $I-A=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1-\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & 1-\cos\theta\end{pmatrix}$

$(I-A)^{-1}=\dfrac{1}{\cos\theta(\cos\theta)-\sin\theta(\sin\theta)}\begin{pmatrix}1-\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & 1-\cos\theta\end{pmatrix}$

$=\dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2} & -\cos\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

12. 考慮 ΔABC。 將原點記為 O。

(a) 設 D 為 BC 上的一點使得 AD 為 $\angle BAC$ 的角平分線。 定義 $BC = a$、$AC = b$ 及 $AB = c$。

(i) 利用 $BD : DC = c : b$ 這事實，證明 $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{OA} + \frac{b}{b+c}\overrightarrow{OB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{OC}$。

(ii) 設 E 為 AC 上的一點使得 BE 為 $\angle ABC$ 的角平分線。
定義 $\overrightarrow{OJ} = \frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$。
證明 J 在 AD 上。 由此，推證 AD 與 BE 相交於 J。

(7 分)

(b) 假定 $\overrightarrow{OA} = 35\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + \mathbf{k}$、$\overrightarrow{OB} = 40\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ 及 $\overrightarrow{OC} = -3\mathbf{j} + \mathbf{k}$。 設 I 為 ΔABC 的內心。

(i) 求 $\overrightarrow{OI}$。

(ii) 藉考慮 $\overrightarrow{AI} \times \overrightarrow{AB}$，求 ΔABC 的內切圓的半徑。

(5 分)

a $\vec{AD} = \frac{c(c) - b(b)}{c+b}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

– 試卷完 –

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。